Michał Stanisław Wójcik

Krótkie wprowadzenie do Szczególnej Teorii Względności

Główne założenie

Prędkość światła mierzona przez obserwatora poruszającego się ruchem jednostajnym względem źródła tego światła jest zawsze stała i wynosi c .

Dylatacja czasu

Będziemy zakładali, że obserwatorowie A i B są punktami materialnymi. A porusza się z prędkością v względem B . Czasami będziemy używać zamiennie punkt A lub B z obserwator A lub B . Rozważmy jakieś dwa zdarzenia, które miały miejsce dokładnie w punkcie A . Niech $\Delta t'$ oznacza czas, który upłynął pomiędzy tymi zdarzeniami, zmierzonymi przez obserwatora A . Niech Δt oznacza czas, który upłynął pomiędzy tymi zdarzeniami, zmierzony przez obserwatora B . Aby wyznaczyć relację pomiędzy $\Delta t'$ i Δt założymy, że punkt A znajduje się na podłodze w statku kosmicznym w kształcie równoległościanu. Podłoga ta jest równoległa z kierunkiem ruchu. Z puntu, w którym jest obserwator A , zostaje wyemitowany foton prostopadle do podłogi. Foton odbija się od sufitu i wraca do obserwatora A . Obserwator A stwierdza, że pomiędzy emisją, a odbiorem fotonu upłynął czas $\Delta t'$.

Aby dokonać niezbędnych obliczeń musimy się najpierw przekonać, że obaj obserwatorzy w wyniku pomiaru otrzymają tę samą wysokość statku. Wyobraźmy sobie, że statek porusza się w tunelu nieruchomym względem obserwatora B . Obserwator B po dokonaniu pomiaru stwierdza, że wysokość tunelu równa się wysokości statku. Oznaczmy wynik pomiaru obserwatora B przez h . Obserwator A w wyniku pomiaru wysokości statku otrzymuje wynik h' . Obserwator A wykonuje również pomiar wysokości tunelu i otrzymuje wynik h'' .

	Tunel		Statek	
	wysokość	prędkość	wysokość	prędkość
A	h''	v	h'	0
B	h	0	h	v

Ze względu na symetrię zachodzącą pomiędzy obserwatorami A i B , h' ma się do h , tak samo jak h do h'' . Zatem jeżeli byłoby $h'>h$, to musiało by być również $h>h''$. Czyli względem obserwatora A statek poruszałby się w tunelu, który ma mniejszą od niego wysokość. Uznamy, że tak być nie może. Jeżeli zaś $h'<h$, wtedy musiałoby zachodzić również $h<h''$. W tym przypadku obserwator A musiałby uznać, że pozostaje pewien prześwit pomiędzy wnęką tunelu a statkiem. Czy jest to sprzeczne z pomiarami obserwatora B , który nie stwierdza istnienia takie prześwitu? Powstałaby pewna trudność, gdyby coś zostało umieszczone w stwierdzonym przez obserwatora A prześwicie. Co obserwowałby wtedy obserwator B ? Uznajmy, że to również prowadzi do sprzeczności. Te nie do końca ścisłe rozważania pozwalają nam przyjąć, że $h'=h$.

Powróćmy teraz do rozważań związanych z ustalaniem relacji pomiędzy $\Delta t'$ i Δt . Obserwator A stwierdzi, że foton w czasie $\Delta t'$ przebył drogę 2h . A zatem

$$c=\frac{2\mathrm{h}}{\Delta t'} \quad .$$

Obserwator B stwierdzi, że w czasie Δt foton przesunął się w kierunku ruchu statku o długość $\Delta t\, v$

, zaś w kierunku do ruchu prostopadłym przesunął się najpierw o długość h w górę, a następnie o długość h w dół. Zatem na mocy twierdzenia Pitagorasa przebył drogę $\sqrt{(\Delta t\, v)^2+(2\mathrm{h})^2}$, a zatem

$$c=\frac{\sqrt{(\Delta t\, v)^2+(2\mathrm{h})^2}}{\Delta t}.$$

Podstawiając w powyższym równaniu za 2h wartość obliczoną z równania pierwszego i podnosząc stronami do kwadratu otrzymamy.

$$c^2=\frac{(\Delta t\, v)^2+(\Delta t'\, c)^2}{(\Delta t)^2}.$$

Po przekształceniu otrzymujemy zależność

$$\Delta t'=\Delta t\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}.$$

Skrócenie długości

Przyjmijmy, że obserwator A znajduje się na podłodze, na samym końcu statku. Obserwatorzy A i B dokonują pomiaru długości statku. Obserwator A otrzyma wartość $\Delta x'$, obserwator B otrzyma wartość Δx. Załóżmy teraz, że z punktu A zostaje wyemitowany foton w kierunku równoległym do ruchu statku, odbije się od przedniej ścianki statku i powróci do obserwatora A. Po dokonaniu pomiaru czasu, który upłynął pomiędzy emisją a odebraniem fotonu, obserwator B otrzymuje wynik Δt, zaś obserwator A, zgodnie z wyprowadzonym wcześniej wzorem, $\Delta t'=\Delta t\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$. Dla obserwatora A foton przebył drogę $2\Delta x'$, zaś dla obserwatora B foton przebył drogę $s=\Delta x+\theta v+\Delta x-(\Delta t-\theta)v=2\Delta x+(2\theta-\Delta t)v$, gdzie θ jest czasem, w którym foton dogonił przednią ściankę. Oczywiście musi zachodzić $\frac{\theta v+\Delta x}{\theta}=c$. Zatem $\theta=\frac{\Delta x}{c-v}$. Ponieważ $s=\Delta t c$ mamy

$$2\Delta x+(2\frac{\Delta x}{c-v}-\Delta t)v=\Delta t c.$$

Stąd

$$\Delta t=2\Delta x\frac{c}{c^2-v^2}.$$

Zatem,

$$\frac{2\Delta x'}{c}=\Delta t'=2\Delta x\frac{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{c^2-v^2},$$

Czyli

$$\Delta x'=\frac{\Delta x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

A zatem długość statku zmierzona przez obserwatora B , będzie miała mniejszą wartość, niż długość statku zmierzona przez obserwatora A .

Względność równoczesności

Dalej przyjmujemy, że obserwator A znajduje się na samym końcu statku. Wyobraźmy sobie, że obserwator A ma zegar. Drugi zegar umieszczony jest w statku, w punkcie C, w odległości x' (mierzona względem obserwatora A) od obserwatora A na linii jego ruchu względem obserwatora B . Zegary te są zsynchronizowane. Zegar oddalony od obserwatora A wysyła wartość wskazywanego czasu za pomocą fal radiowych. Obserwator A wie, że oba zegary wskazują dokładnie tą samą „godzinę” ponieważ, gdy jego zegar wskazuje czas t', dociera do niego wysłany przez drugi zegar sygnał z wartością czasu $t'-\frac{x'}{c}$.

W momencie, gdy oba zegary wskazują 0 zostaje z każdego z nich wyemitowany foton. Fotony te zderzą się dokładnie w połowie drogi między nimi. Obserwator B również będzie musiał stwierdzić, że fotony zderzyły się dokładnie pośrodku między zegarami. Jednak ten środek oddala się od obserwatora B z prędkością v . Zatem foton wyemitowany z punktu A musi ten środek gonić, zaś foton wyemitowany z punktu C wręcz przeciwnie, przybędzie do niego szybciej. Wynika z tego, że względem obserwatora B foton został wyemitowany z punktu C później niż z punktu A . A zatem o równoczesności zdarzeń możemy mówić jedynie względem konkretnego obserwatora.

Obliczymy teraz dokładnie ile wynosi to opóźnienie. Oznaczmy je przez t . Niech θ_1 oznacza czas, mierzony przez obserwatora B , który upłynął od wyemitowania fotonu z punktu A do momentu zderzenia. Niech θ_2 oznacza czas , mierzony przez obserwatora B , który upłynął od wyemitowania fotonu z punktu C do momentu zderzenia. Odległość pomiędzy zegarami, zmierzona przez obserwatora B , niech wynosi x .

Mamy

$$\frac{\frac{1}{2}x+\theta_1 v}{\theta_1}=\frac{\frac{1}{2}x-\theta_2 v}{\theta_2}=c.$$

Stąd $\theta_1=\frac{\frac{1}{2}x}{c-v}$ i $\theta_2=\frac{\frac{1}{2}x}{c+v}$. Ponieważ następuje zderzenie $t+\theta_2=\theta_1$. Wyznaczamy z tego

$$t=x\frac{v}{c^2-v^2} .$$

A zatem względem obserwatora B od momentu, w którym zegar w puncie A wskazał 0 , do momentu, w którym zegar w punkcie C wskazał 0 , upłynął czas $t=x\frac{v}{c^2-v^2}$. Oczywiście obserwator B przekona się o tym odbierając sygnały od obu zegarów i dokonując ich odpowiedniej rachunkowej interpretacji.

Korzystając z wyprowadzonych wcześniej wzorów na dylatację czasu możemy również policzyć, patrząc z punktu widzenia obserwatora B , jaki czas t' wskazywał zegar umieszczony w punkcie C , gdy zegar w puncie A wskazywał 0 .

$$t'=\frac{-xv}{c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

Powyższe równianie można również wyrazić względem odległości między punktami A i C mierzonej przez obserwatora A.

$$t'=\frac{-x'v}{c^2}.$$

Zauważmy, że wszystkie powyższe rachunki mają sens dla zegara w puncie C umieszczonego z drugiej strony punktu A, z tym że wtedy wartość x będzie ujemna.

Powyższe rozważania podsumujemy w sposób następujący.

Zdarzenia, które względem obserwatora A będą miały miejsce – jedno w punkcie A w czasie 0; drugie – w odległości x' od obserwatora A (mierzonej przez obserwatora A) na linii jego ruchu względem obserwatora B w czasie $t'=\frac{-x'v}{c^2}$ (mierzonym przez obserwatora A) będą równoczesne względem obserwatora B.

Uproszczona transformacja Lorentza

Załóżmy, że z obserwatorami A i B związane są pewne układy współrzędnych. Środki tych układów są w punktach A i B. Osie Ox pokrywają się, zaś osie Oy i Oz są równoległe. Opisując czasoprzestrzenną lokalizację zdarzenia, obserwatorzy określają ich współrzędne przestrzenne i czasowe. Ponadto współrzędne $(0,0,0,0)$ opisują dokładnie ten sam punkt czasoprzestrzeni, co oznacza, że obserwatorzy wystartowali z tego samego punktu i obydwaj punkt startu opisują tymi samymi współrzędnymi czasoprzestrzennymi $(0,0,0,0)$. Chcemy wiedzieć jakie będą współrzędne $(x,0,0,t)$, którymi obserwator B opisze zdarzenie, które obserwator A opisał za pomocą współrzędnych $(x',0,0,t')$.

Na mocy rozważań dotyczących względności równoczesności zdarzenia opisane współrzędnymi $(0,0,0,t'+\frac{x'v}{c^2})$ i $(x',0,0,t')$ będą równoczesne względem obserwatora B. Zatem zgodnie ze wzorem na dylatację czasu

$$t=\frac{t'+\frac{x'v}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

Zgodnie ze wzorem na skrócenie długości mamy

$$x=vt+x'\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}.$$

Podstawiając za t wartość z powyższego wzoru otrzymamy

$$x=\frac{vt'+x'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

Składanie prędkości

Pozostańmy na razie w nomenklaturze układów współrzędnych wprowadzonych w poprzedniej sekcji. Załóżmy, że pewien obiekt ma prędkość u' względem obserwatora A i porusza się w linii ruchu względem obserwatora B . Obliczymy jaką prędkość u obiekt ten ma względem obserwatora B . Załóżmy, że obserwatorzy i ów obiekt mieli wspólny punkt startu o czasoprzestrzennych współrzędnych $(0,0,0,0)$. Przyjmijmy, że obiekt porusza się ruchem jednostajnym. Po czasie $\Delta t'$ mierzonym przez obserwatora A obiekt emituje błysk światła. Współrzędne czasoprzestrzenne tego zdarzenia w układzie związanym z obserwatorem A są następujące $(u'\Delta t', 0, 0, \Delta t')$. Zgodnie z wyprowadzoną transformacją Lorentza obserwator B opisze to samo zdarzenie za pomocą współrzędnych

$$\left(\frac{v\Delta t' + u'\Delta t'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, 0, 0, \frac{\Delta t' + \frac{vu'\Delta t'}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \right).$$

A zatem

$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}} .$$

Michał Stanisław Wójcik, 28 października 2009